Universität zu Köln

PROF. DR. ANGELA KUNOTH
ANNA WELLER

MATHEMATIK FÜR LEHRAMTSTUDIERENDE
WINTERSEMESTER 2018/2019

Übungsblatt 8

Ausgabe: 28.11.2018 Abgabe: Mittwoch, 05.12.2018 bis 12:00

Aufgabe 32: (5 Punkte)

(i) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine unendliche Reihe reeller Zahlen. Es gebe ein θ mit $0 < \theta < 1$ und ein $n_0 > 0$, sodass

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta$$

für alle $n \geq n_0$ gilt. Zeigen Sie, dass die Reihe absolut konvergiert.

(ii) Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n := \frac{3^n}{n \cdot 5^n}$ absolut konvergiert.

Hinweis zu (i): Benutzen Sie das Majorantenkriterium.

Aufgabe 33: (5 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

mit $k \in \mathbb{N}, k > 1$, konvergiert.

(ii) Häufig hilft es dem Vorstellungsvermögen, sich einen Sachverhalt graphisch darzustellen, also etwas zu visualisieren.
Zeichnen Sie dazu die Paare $\left(N, \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\right)$ und $\left(N, \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right)$ für $N = 1, \ldots, N_{\max}$ bis zu einem geeigneten $N_{\max}$, um das Konvergenzverhalten der harmonischen Reihe sowie der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ zu visualisieren.

(iii) Zeichen Sie nun auch die Paare $\left(N, \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$ bis zu einem geeigneten $N_{\max}$, um das Konvergenzverhalten der alternierenden harmonischen Reihe zu visualisieren.

Aufgabe 34: (4 Punkte)
Wir betrachten die Exponentialreihe

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + R_{N+1}(x)$$

mit dem Restglied $R_{N+1}(x) := \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Zeigen Sie, dass das Restglied für alle x mit $|x| \leq 1 + \frac{N}{2}$ die Abschätzung

$$|R_{N+1}(x)| \leq 2 \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$$

erfüllt.

Aufgabe 35: (Fortsetzung von Aufgabe 27, 6 Punkte)
Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$x_0 := a,\ \ x_1 := b \tag{1}$$
$$x_n := px_{n-1} + qx_{n-2} \ \text{ für } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \tag{2}$$

mit $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ und $\frac{p^2}{4} > -q$ gegeben.
In Aufgabe 27 haben wir gezeigt, dass die beiden Folgen

$$(\lambda_1)^n = \left(\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}\right)^n$$
$$(\lambda_2)^n = \left(\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}\right)^n$$

die lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$x_n - px_{n-1} - qx_{n-2} = 0 \tag{3}$$

erfüllen.

(i) Zeigen Sie, dass dann auch die Linearkombination $x_n := \alpha(\lambda_1)^n + \beta(\lambda_2)^n$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die lineare Differenzengleichung (3) erfüllt.

(ii) Leiten Sie eine explizite Darstellung von x_n her, indem Sie α und β durch Einsetzen der Anfangswerte bestimmen.

(iii) Bestimmen Sie die explizite Darstellung der Glieder x_n der Fibonacci-Folge.