PROF. DR. ANGELA KUNOTH
ANNA WELLER

MATHEMATIK FÜR LEHRAMTSTUDIERENDE
WINTERSEMESTER 2018/2019

Übungsblatt 7

Ausgabe: 21.11.2018 Abgabe: Mittwoch, 28.11.2018 bis 12:00

Aufgabe 28: (5 Punkte)
Beweisen Sie für $a \geq 0,\ b \geq 0$ die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b),$$

wobei Gleichheit genau dann eintrifft, wenn $a = b$ ist.

Aufgabe 29: (5 Punkte)
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

für eine reelle Zahl $a > 0$ gegen die Quadratwurzel von a konvergiert. Wir führen nun zusätzlich die Folge

$$y_n := \frac{a}{x_n}$$

ein.

(i) Zeigen Sie, dass $y_n \leq \sqrt{a} \leq x_n$ für alle $n \geq 1$ gilt.

(ii) Nähern Sie die Quadratwurzel aus $a := 3$ mithilfe dieser beiden Folgen nun von unten und oben auf 10 Nachkommastellen genau an. Als Referenzlösung sei der Grenzwert $x^* := \sqrt{3} = 1.732050807568877...$ gegeben.
Wählen Sie als Startwerte $x_0 = 3$ und $y_0 = \frac{a}{x_0} = 1$ und berechnen Sie rekursiv x_n und y_n. Wiederholen Sie das Verfahren für die Startwerte $x_0 = 1000$ und $y_0 = \frac{a}{x_0} = \frac{3}{1000}$. Wie viele Iterationsschritte haben Sie jeweils gebraucht?
Da man in diesem Fall eine Referenzlösung gegeben hat, ist es nützlich, auch den Fehler $|x_n - x^*|$ und $|y_n - x^*|$ in jedem Iterationsschritt zu betrachten. Was fällt Ihnen dabei auf?

Aufgabe 30: (4 Punkte)
Beweisen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+\sqrt{n}} - \sqrt[3]{n}\right) = 0$ gilt.

Aufgabe 31: (6 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz (mit Beweis).

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n} \qquad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \text{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$$