Universität zu Köln

PROF. DR. ANGELA KUNOTH
ANNA WELLER

MATHEMATIK FÜR LEHRAMTSTUDIERENDE
WINTERSEMESTER 2018/2019

Übungsblatt 6

Ausgabe: 14.11.2018 Abgabe: Mittwoch, 21.11.2018 bis 12:00

Aufgabe 23: (3 Punkte)
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$0 \leq a_n \leq \Big(\frac{1}{2}\Big)^n$$

gilt und bestimmen Sie anschließend (mit Begründung!) den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 24: (4 Punkte)

(i) Es seien $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0.$$

Man spricht in diesem Fall von einer *Teleskopsumme*.

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. Schreiben Sie s_n als geeignete Teleskopsumme, um $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$ zu beweisen.

Aufgabe 25: (3 Punkte)
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Zeigen Sie, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge ist, indem Sie $s_{2n} - s_n$ nach unten abschätzen.

Aufgabe 26: (6 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz. Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \dfrac{1+6n+2n^2}{(n+3)n}$ (ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := 6 - \dfrac{6+n^2}{n}$

Aufgabe 27: (4 Punkte)
Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$x_0 := a, \;\; x_1 := b \tag{1}$$

$$x_n := px_{n-1} + qx_{n-2} \;\text{ für } n \in \mathbb{N},\; n \geq 2 \tag{2}$$

mit $a,b,p,q \in \mathbb{R}$ und $\frac{p^2}{4} \neq -q$ gegeben.
Es ist im Allgemeinen kompliziert, Aussagen über Konvergenz, Monotonie etc. für implizite Folgen wie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zu treffen. Wir leiten daher auf diesem und dem folgenden Übungsblatt schrittweise eine explizite Darstellung von x_n her.
Hierzu formen wir zunächst (2) um und erhalten die lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$x_n - px_{n-1} - qx_{n-2} = 0. \tag{3}$$

Mithilfe dieser Gleichung möchten wir nun ein x_n herleiten, das (2) erfüllt.

(i) Wählen Sie den Ansatz $x_n = \lambda^n$ in (3) für ein $\lambda \neq 0, n \geq 2$, um zwei Folgen $(x_{1,n})_{n\in\mathbb{N}_0} = (\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(x_{2,n})_{n\in\mathbb{N}_0} = (\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ herzuleiten, die die Rekursiongleichung (2) erfüllen.

(ii) Bestimmen Sie $(\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für die Fibonacci Folge (Beispiel 2.1.1 aus der Vorlesung).