Prof. Dr. Angela Kunoth
Anna Weller

Mathematik für Lehramtstudierende
Wintersemester 2018/2019

Übungsblatt 4

Ausgabe: 31.10.2018

Abgabe: Mittwoch, 07.11.2018 bis 12:00
Hinweise zur Abgabe finden Sie auf der Veranstaltungshomepage

Aufgabe 15: (4 Punkte)
Kreuzen Sie die richtige Auswahlmöglichkeit an. Es ist jeweils nur *eine* Antwort richtig.

1. Seien X,Y Mengen. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist eine Vorschrift, die
   - ◯ jedem x aus dem Wertebereich X genau ein Element aus dem Definitionsbereich Y zuordnet.
   - ◯ jedem x aus dem Definitionsbereich X genau ein Element im Wertebereich Y zuordnet.
   - ◯ jedem y aus dem Wertebereich Y genau ein Element im Definitionsbereich X zuordnet.
   - ◯ jedem y aus dem Definitionsbereich Y genau ein Element aus dem Wertebereich X zuordnet.
2. Für Mengen X,Y heißt die Abbildung $f : X \to Y$
   - ◯ surjektiv, falls $\exists x_1 \in X \ \forall x_2 \in X : \ f(x_1) \neq f(x_2)$.
   - ◯ injektiv, falls $\exists x_1 \in X \ \forall x_2 \in X : \ f(x_1) \neq f(x_2)$.
   - ◯ surjektiv, falls $\forall y \in Y \ \exists x \in X : \ y = f(x)$.
   - ◯ injektiv, falls $\forall y \in Y \ \exists x \in X : \ y = f(x)$.
3. Welche der folgenden Aussagen über bijektive Abbildungen ist korrekt?
   - ◯ Eine Menge A heißt überabzählbar, falls es eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$ gibt.
   - ◯ Zwei Mengen A,B heißen gleich mächtig, falls es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ gibt.
   - ◯ Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist bijektiv genau dann, wenn sie injektiv ist.
   - ◯ Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist bijektiv genau dann, wenn sie surjektiv ist.
4. Für eine Folge reeller Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt
   - ◯ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{N}$.
   - ◯ Jede Nullfolge divergiert.
   - ◯ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$, falls $\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n \geq N : \ |x_n - x^*| < \varepsilon$.
   - ◯ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, falls $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N : \ |x_n| < \varepsilon$.

Aufgabe 16: (6 Punkte)
Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit

$$f(n) := \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{für } n \text{ gerade} \\ \frac{1-n}{2} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

eine Bijektion ist.

Aufgabe 17: (5 Punkte)
Beweisen Sie: Die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar.

Freiwillige Zusatzaufgabe: Überlegen Sie sich, warum auch $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist.

Aufgabe 18: (5 Punkte)
Beweisen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := \frac{n}{2^n}$ eine Nullfolge ist, d.h. dass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

Hinweis: Sie können Aufgabe 11 von Übungsblatt 3 verwenden.