Universität zu Köln

Prof. Dr. Angela Kunoth
Anna Weller

Mathematik für Lehramtstudierende
Wintersemester 2018/2019

Bonusblatt

Ausgabe: 23.01.2019 Abgabe: Mittwoch, 30.01.2019 bis 12:00

Aufgabe 54: (4 Punkte)
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$0 \leq a_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

gilt und bestimmen Sie anschließend (mit Begründung!) den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 55: (6 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \qquad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \qquad \text{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n}$$

Aufgabe 56: (6 Punkte)
Wir betrachten die Exponentialreihe

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + R_{N+1}(x)$$

mit dem Restglied $R_{N+1}(x) := \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. In Aufgabe 34 haben wir gezeigt, dass das Restglied für alle x mit $|x| \leq 1 + \frac{N}{2}$ die Abschätzung

$$|R_{N+1}(x)| \leq 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$$

erfüllt.

(i) Nutzen Sie das Restglied 2. Ordnung $R_2(x)$ in obiger Darstellung der Reihe für die Exponentialfunktion, um

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

für $x \neq 0$ zu zeigen.

(ii) Bestimmen Sie die Ableitung der Exponentialfunktion mithilfe der Grenzwertdefinition der Ableitung.

Aufgabe 57: (4 Punkte)
Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $g \geq 0$. Zeigen Sie, dass ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

existiert.