Einführung in die Numerik hochdimensionaler Integration

Angela Kunoth

Seminar zur Numerik I im SS 2015, Universität zu Köln
13. April 2015

Ziel dieses Vortrags: Motivation der Thematik

- Hochdimensionale Probleme der Finanzmathematik
- Probleme mit klassischen Integrationsverfahren
- Algorithmen für hochdimensionale Integration

Verwendete Literatur:

[CMO] R. Caflisch, W. Morokoff, A. Owen, Valuation of mortgage-backed securities using Brownian bridges to reduce effective dimension, J. Comput. Finance 1 (1997), 27-–46.

[DKS] J. Dick, F. Y. Kuo, I. H. Sloan, High-dimensional integration — The quasi-Monte Carlo way, Acta Numerica 22 (2013), 133–288. doi: 10.1017/S0962492913000044

[G] M. Giles, Multilevel Monte Carlo methods, erscheint in: Acta Numerica 2015.

[K] A. Kunoth, Finanznumerik I, Skript zur Vorlesung im SS 2013 an der Univ. Paderborn, Version vom 11. Juli 2013.

Algorithmen für hochdimensionale Integration

Aufgabe: numerische Berechnung von

$$\int_{[0,1]^d} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{d\text{-mal}} f(x_1, \ldots, x_d)\, dx_1 \ldots dx_d$$

$f : [0,1]^d \to \mathbb{R}$ gegebene multivariate Funktion $\qquad$ $d \gg 1$ Raumdimension

Motivation: Finanznumerik

- Mortgage-Backed Securities (MBS, durch Hypotheken gesicherte Wertpapiere), typisch: $d = 256$
- Bewertungen pfadabhängiger Optionen, d Anzahl der Zeitschritte, typisch $d = 2^{10}$

Klassisches Thema der Numerik I: Numerische Integration (Quadratur) eindimensionaler Integrale

Aufgabe: berechne $\quad \int_0^1 f(x)\, dx, \qquad f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegebene univariate Funktion

Problem: selbst bei gegebenem f Integral häufig nicht analytisch/theoretisch berechenbar

Lösung:

- $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} a_i f(z_i)$ (Approximation an N gegebenen Quadraturstellen $z_i \in [0,1]$)
- Approximation des Integranden durch "einfach" zu integrierende Funktion, z.B. lineares Polynom $g(x) = ax + b$ mit $g(0) = f(0)$, $g(1) = f(1)$ $\quad\rightsquigarrow$

$$\int_0^1 f(x)\, dx \approx \int_0^1 g(x)\, dx \qquad \text{(Trapezregel)}$$

Quadraturformeln

Trapezregel: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \approx \int_0^1 g(x)\,dx$ mit $g(x) = ax + b$, $g(0) = f(0)$, $g(1) = f(1)$

$\rightsquigarrow N = 2$ Freiheitsgrade

Idee für $d > 1$: wende eindimensionale Quadraturformel in jeder Raumdimension an
$\rightsquigarrow$ Auswertung des Integranden z.B. mit Trapezregel an $N = 2^d$ Stellen
Problem: für $d \gg 1$ (z.B. $d = 256$) ist $N = 2^{256} \approx 1.2 * 10^{77}$ praktisch unmöglich

Wichtig für Güte der Approximation: Quadraturfehler
Klassische Integrationsformeln mit Polynomen vom Grad $r - 1$ in jeder Raumdimension liefern

$$\left| \int_{[0,1]^d} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_i f(z_i) \right| \lesssim N^{-r/d}$$

(Trapezregel: für $d = 1$ ist $r = 2$, also Fehler $\lesssim N^{-2}$)

Problem: Fehlerabschätzung unbrauchbar für $d \gg 1$
(ausser Wahl $d = r$, doch Polynom oszilliert stark für grosses d)

Alternative: Monte-Carlo-Methoden (MC-Methoden)
Hier:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(z_i) \qquad \text{mit } z_i \quad \text{Zufallsvariablen}$$

Fehler:

$$\left| \int_{[0,1]^d} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(z_i) \right| \lesssim N^{-1/2} \qquad \text{unabhängig von Raumdimension } d$$

aber Fehlerreduktionsrate $1/2$ sehr langsam

Beschleunigungen der MC-Methode

- Quasi-Monte-Carlo-Methoden (QMC-Methoden)
  $\rightsquigarrow$ Übersichtsartikel
  J. Dick, F. Y. Kuo, and I. H. Sloan, High-dimensional integration — The quasi-Monte Carlo way, Acta Numerica, 22, 133 – 288 (2013). doi: 10.1017/S0962492913000044
- Multilevel-Monte-Carlo-Methoden (MLMC-Methoden)
  $\rightsquigarrow$ Übersichtsartikel
  M. Giles, Multilevel Monte Carlo methods, erscheint in: Acta Numerica 2015;
  Matlab codes unter http://people.maths.ox.ac.uk/ gilesm/acta/

Ziel und Sinn eines Seminars

Eigenständig (mit Hilfestellung) vertiefende Themen bearbeiten und anderen darstellen: wissenschaftliches Arbeiten lernen
Hier: Themen aus der Finanznumerik, basierend auf Vorlesungsskripten, Buchkapiteln, engl. Originalarbeiten

Organisatorisches/Inhaltliches zu Seminarvorträgen

1. Festlegung verbleibender Themen und Vortragstermine am 13.04.;
2. Literatur durcharbeiten und bis ins Detail verstehen; ggf. weitere Arbeiten/Literatur hinzuziehen
3. Formular zur Anmeldung zum Seminar (Webseite des Math. Inst.) bei Organisatoren abgeben (oder ins Postfach Kunoth bei Frau Georg);
4. bis 2 Wochen vor Vortrag an krupp@math.uni-koeln.de bzw. gerster@math.uni-koeln.de erste Version der Folien (max 15) zur Durchsicht mailen;
5. Vortrag halten (max 30 Minuten);
6. bis maximal 1 Monat nach dem Vortrag schriftliche Ausarbeitung zum Vortrag an krupp@math.uni-koeln.de bzw. gerster@math.uni-koeln.de mailen; diese wird einmal von Organisatoren durchgesehen und kann danach überarbeitet werden.
7. Die Note des Seminarbeitrags ergibt sich aus Vortrag, Inhalt/Gestaltung der Folien und der schriftlichen Ausarbeitung in der finalen Version.