Universität zu Köln

Prof. Dr. Angela Kunoth
Sandra Boschert

Algorithmische Mathematik und Programmieren
WS 2017/2018

Präsenzübung 8

Ausgabe: 7.12.2017 Besprechung in der Übung in der Vorlesungswoche vom 11.12.2017 bis 15.12.2017.

Aufgabe 15: *(Cholesky-Zerlegung bei Tridiagonalmatrizen)*

Gegeben sei eine Tridiagonalmatrix, d.h. eine Matrix der Art $A := (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $a_{i,j} = 0$ für $|i-j| > 1$. Zudem sei die Matrix symmetrisch und positiv definit. Lineare Gleichungssysteme mit dieser Matrix können durch die Cholesky-Zerlegung ($A = LDL^T$) gelöst werden.

a) Entwerfen Sie ausgehend von (3.4.8) und der nachfolgenden Herleitung aus der Vorlesung einen vereinfachten Algorithmus bei Tridiagonalmatrizen.

b) Bestimmen Sie die Komplexität des vereinfachten Algorithmus (Anzahl der Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, Divisionen) und vergleichen Sie diese mit dem Aufwand des Algorithmus für vollbesetzte Matrizen.

Aufgabe 16: *(Cholesky-Zerlegung)*

Betrachten Sie die positiv definite und symmetrische 4×4 Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 11 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 14 \end{pmatrix}.$$

a) Entwerfen Sie mit Hilfe des Programmentwurfs 3.4.9 aus der Vorlesung das Cholesky Verfahren zur Bestimmung der Zerlegung $A = \tilde{L}\tilde{L}^T$ anstatt $A = LDL^T$.

b) Finden Sie a priori eine obere Schranke $C > 0$ für die Beträge der Elemente $\tilde{L}_{i,j}$ der bei der Cholesky-Zerlegung ($A = \tilde{L}\tilde{L}^T$) entstehenden unteren Dreiecksmatrix $\tilde{L}$.

c) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung ($A = \tilde{L}\tilde{L}^T$) von A. Geben Sie alle Teilschritte explizit an.

d) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (2, 8, 23, -10)^T$ mit der Vorwärtssubstitution ($\tilde{L}y = b$) und der Rückwärtssubstitution ($\tilde{L}^T x = y$).