Prof. Dr. Angela Kunoth
Sandra Boschert

Algorithmische Mathematik und Programmieren
WS 2017/2018

Präsenzübung 5

Ausgabe: 16.11.2017 Besprechung in der Übung in der Vorlesungswoche vom 20.11.2017 bis 24.11.2017.

Aufgabe 9:
Sei $||\cdot||$ eine beliebige Vektornorm im $\mathbb{R}^n$. Gängige Wahlen der Vektornorm sind

$$||x||_p := \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad ||x||_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|, \quad x := (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Die zugehörige Matrixnorm $||\cdot||'$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist definiert als

$$||A||' := \sup_{x\neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}.$$

Zeigen Sie: Für die durch

$$|||A||| := \sup_{||x||=1} ||Ax||$$

definierte Matrixnorm $|||\cdot|||$ gilt

$$|||A||| = ||A||' \qquad \text{für alle Matrizen } A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Aufgabe 10:
Zeigen Sie für die Matrizennormen aus Aufgabe 9 und für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n},\ x \in \mathbb{R}^n$:

a) $||Ax|| \leq ||A||'\,||x||$

b) $||AB||' \leq ||A||'\,||B||'$

c) $||I_n||' = 1$, wobei I_n die $n \times n$-Einheitsmatrix ist.

d) Sei die Frobeniusnorm $||\cdot||_F$ definiert durch

$$||A||_F := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

Zeigen Sie, dass es keine Vektornorm gibt, sodass die Frobeniusnorm die zugehörige Matrixnorm ist.
Hinweis: Teilaufgabe c)