Prof. Dr. Angela Kunoth
Sandra Boschert

Algorithmische Mathematik und Programmieren
WS 2017/2018

Präsenzübung 2

Besprechung in der Übung in der Vorlesungswoche vom 23.10.2017 bis 27.10.2017.

Aufgabe 4: *(Drei-Term-Rekursion)*
Eine allgemeine Drei-Term-Rekursion für $n \in \mathbb{N}$ besitzt die Form

$$R_{n+1} = a_n R_n + b_n R_{n-1} + c_n$$

mit Koeffizienten $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$. Startwerte R_0, R_1 sind vorzugeben. Falls stets $c_n = 0$ gilt, heißt die Rekursion homogen, andernfalls inhomogen.

a) Betrachten Sie eine homogene Rekursion. Die Anfangswerte und die Koeffizienten seien fehlerbehaftet, d.h. gegeben sind

$$\tilde{R}_0 = R_0(1+\delta_0) \quad \tilde{R}_1 = R_1(1+\delta_1) \quad \tilde{a}_n = a_n(1+\alpha_n) \quad \tilde{b}_n = b_n(1+\beta_n).$$

Dadurch entstehen gestörte Werte $\tilde{R}_n = R_n + \Delta R_n$. Leiten Sie jeweils eine inhomogene Rekursion für den absoluten Fehler $\Delta R_{n+1} := \tilde{R}_{n+1} - R_{n+1}$ und den relativen Fehler $\rho_{n+1} := \Delta R_{n+1}/R_{n+1}$ her. (Die Koeffizienten c_n können dabei noch von den $\tilde{R}_n, R_n$ abhängen.) Spezifizieren Sie auch die Startwerte der Rekursionen.
Es sei $|a_n|, |b_n| \approx 1$. Was folgt für die Verstärkung des relativen Fehlers mit steigendem n, wenn benachbarte Folgenglieder ungefähr gleich sind ($R_n \approx R_{n+1}$) im Gegensatz zu einer stark abfallenden Folge ($|R_{n+1}| \gg |R_n|$)?

b) Die Fibonacci-Folge $F_0, F_1, \ldots$ ist durch das rekursive Bildungsgesetz

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2$$

mit den Anfangswerten

$$F_0 := 0 \quad \text{und} \quad F_1 := 1$$

definiert. Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-2}}.$$

Benutzen Sie Teil a), um Schlussfolgerungen für das Wachstumsverhalten des relativen Fehlers für die Fibonacci-Rekursion zu ziehen.

Hinweis: Leiten Sie dazu eine geeignete Beziehung für die Quotienten F_n/F_{n-1} und F_n/F_{n-2} her und gehen Sie zum Grenzwert über.

Aufgabe 5: *(Elementare Matrixoperationen)*

Wir betrachten Matrizen im $\mathbb{R}^{n\times n}$, mit denen elementare Operationen beschrieben werden, speziell Skalierungsmatrizen D, Permutationsmatrizen $P_{i,j}$ und Reihenoperatoren $N_{i,j}(\alpha)$ (Definitionen unten).

a) Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen $D, P_{i,j}$ und $N_{i,j}(\alpha)$.

b) Gegeben sei eine normierte obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Stellen Sie R als Produkt aus Reihenoperatoren $N_{i,j}(\alpha)$ dar. Verwenden Sie elementare Operationen, um eine beliebige reguläre (d.h. invertierbare) obere Dreiecksmatrix $\tilde{R}$ zu bilden.

Hinweis: Skalierungsmatrizen sind Diagonalmatrizen. Die Vertauschung wird mittels elementarer Permutationsmatrizen dargestellt. Sie entstehen aus der Einheitsmatrix durch das Vertauschen der Zeile i mit der Zeile j, d.h. wir definieren

$$P_{ij} := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Die elementare Operation, ein Vielfaches einer Zeile/Spalte zu einer anderen Zeile/Spalte hinzuzuaddieren, wird beschrieben durch die Matrix $N_{i,j}(\alpha)$ mit $i \neq j$. Die Matrix $N_{i,j}(\alpha)$ ist identisch mit der Einheitsmatrix außer der Komponente (i, j), die das Element α enthält. Zum Beispiel beschreibt das Produkt $N_{i,j}(\alpha)A$ gerade α-mal Zeile j der Matrix A addiert zu Zeile i, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist.