Prof. Dr. Angela Kunoth
Sandra Boschert

Algorithmische Mathematik und Programmieren
WS 2017/2018

Präsenzübung 10

Ausgabe: 21.12.2017 Besprechung in der Übung in der Vorlesungswoche vom 8.1.2018 bis 12.1.2018.

Aufgabe 18:

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 13 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

welches die eindeutige Lösung $x = (0,0,1)^T$ besitzt.

a) Zerlegen Sie mit Hilfe der Givens-Rotation die Matrix A in eine orthogonale Matrix und in eine obere Dreiecksmatrix. Führen Sie dabei alle Rechnungen mit vierstelliger Genauigkeit durch, so dass Sie eine Zerlegung der Form $A \approx \tilde{Q}\tilde{R}$ erhalten. Verwenden Sie den Algorithmus zur Berechnung der Givensrotation, der Rundungsfehler gering hält.

b) Schätzen Sie den relativen Fehler $\frac{\|\tilde{x}-x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ ab, wenn mit dem gestörten linearen Gleichungssystem $\tilde{A}\tilde{x} = b$ aus Teil a) gerechnet wird.

c) Lösen Sie mit Hilfe der berechneten Zerlegung aus Teilaufgabe a) das gestörte lineare Gleichungssystem $\tilde{A}\tilde{x} = b$. Berechnen Sie den relativen Fehler in der Maximumsnorm. Vergleichen Sie diesen Fehler mit der in Teil b) hergeleiteten Abschätzung.

Aufgabe 19:

Gegeben sei eine obere Hessenberg-Matrix $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$, d.h. eine Matrix der Art $H := (h_{i,j})$ mit $h_{i,j} = 0$ für alle $i > j+1$. Ein Beispiel für eine obere Hessenberg-Matrix ist die Matrix A aus Aufgabe 18.

a) Entwerfen Sie mit Hilfe von (3.7.31) aus der Vorlesung einen vereinfachten Algorithmus zur Berechnung der QR-Zerlegung mit Givens-Rotation bei Hessenberg-Matrizen.

b) Wie viele arithmetische Operationen benötigt der vereinfachte Algorithmus bei einer QR-Zerlegung mit Givens-Rotation? Begründen Sie Ihre Antwort.