Prof. Dr. Angela Kunoth
Sandra Boschert

Algorithmische Mathematik und Programmieren
WS 2017/2018

Präsenzübung 1

Besprechung in der Übung in der Vorlesungswoche vom 16.10.2017 bis 20.10.2017.

Die Landau–Symbole sind wie folgt definiert:

$$f(x) = o\big(g(x)\big) \quad \text{für } x \to x_0, \quad \text{falls} \quad \lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$$
$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{für } x \to x_0, \quad \text{falls} \quad \limsup_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty.$$

Aufgabe 1:

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Matrizen und $C := AB$ mit Einträgen $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, $\forall\ i, j \in \{1,\dots,n\}$.

a) Bestimmen Sie, wie viele elementare Additionen und wie viele Multiplikationen reeller Zahlen zur Berechnung des Produkts $C := AB$ mit der o.g. Summenformel notwendig sind. Eine elementare Rechenoperation koste die Zeit 1. Drücken Sie die benötigte Zeit für die Matrixmultiplikation mit Hilfe der Landausymbole aus.

b) Sei nun n eine Zweierpotenz, also $n = 2^m$ mit $m \in \mathbb{N}$. Strassen schlug folgendes Verfahren[1] vor:
Zerlege A und B in jeweils vier $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Berechne die sieben Hilfsprodukte:

$$\begin{aligned} P_1 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}) & P_5 &= (A_{11} + A_{12})B_{22} \\ P_2 &= (A_{21} + A_{22})B_{11} & P_6 &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}) \\ P_3 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}) & P_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}) \\ P_4 &= A_{22}(B_{21} - B_{11}) & & \end{aligned}$$

Dann gilt:
$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 + P_4 - P_5 + P_7 & P_3 + P_5 \\ P_2 + P_4 & P_1 + P_3 - P_2 + P_6 \end{pmatrix}$$

Damit reduziert sich die Zahl der Multiplikationen kleinerer Matrizen von acht auf sieben gegenüber dem naiven Verfahren, während die Zahl der Additionen gestiegen ist[2]. Dieses Verfahren wird nun rekursiv zur Berechnung der sieben kleineren Produkte angewandt.
Zeigen Sie, dass die benötige Zeit $T(n)$ für die Multiplikation zweier $n \times n$-Matrizen der Rekurrenzrelation

$$T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{9}{2}n^2, \qquad T(1) = 1$$

genügt.

c) Beweisen Sie mit Hilfe einer vollständigen Induktion und Teilaufgabe b) die Gleichung

$$T(n) = 7^m + \sum_{k=0}^{m-1} 7^k \frac{9}{2}\left(\frac{n}{2^k}\right)^2.$$

[1] V. Strassen, *Gaussian elimination is not optimal,* Numerische Mathematik, 13:354–356 (1969).
[2] Es gibt eine Variante von Winograd, die nur 15 statt 18 Additionen benötigt.

Folgern Sie daraus die Komplexität $O(n^{\log_2 7}) \approx O(n^{2.807})$ der Matrixmultiplikation nach Strassen.

Tipp: Wählen Sie $\varepsilon > 0$ mit $\log_2 - \varepsilon \geq 2$ und zeigen Sie: $T(n) \leq n^{\log_2 7} \frac{2^\varepsilon}{2^\varepsilon - 1}$

d) Zeigen Sie, dass $O(n^2)$ eine untere Schranke für die Komplexität der Matrixmultiplikation ist.

Bemerkung: Ein sehr bekannter Algorithmus zur Matrixmultiplikation stammt von D. Coppersmith und S. Winograd[3] aus dem Jahr 1990 und besitzt die Komplexität $O(n^{2.376})$. Eine minimal verbesserte Variante von F. Le Gall[4] besitzt die derzeit beste bekannte Komplexität von $O(n^{2.3728639})$.

Aufgabe 2:

Sei $x > 0$. Gegeben seien nun jeweils für $x \to 0$ die Funktionen $f = O(x^2)$, $g = O(x^3)$ und $\tilde{g} = O(x^3)$.
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen für $x \to 0$.

a) $f = o(x)$

b) $f = o(x^2)$

c) $fg = O(x^5)$

d) $f + g = O(x^3)$

e) $g(x) - \tilde{g}(x) = 0$

f) $\tilde{g}g^{-1} = O(1)$

Aufgabe 3:

Führen Sie die Taylor-Entwicklung zur Funktion $f(x) = \ln(x)$ um den Punkt $x_0 = 1$ durch, d.h. geben Sie eine Formel für die Koeffizienten der Taylor-Reihe an. Bestimmen Sie auch eine Formel für das allgemeine Restglied R_{n+1}. Zeigen Sie damit, dass die Taylor-Reihe um den Punkt $x_0 = 1$ für alle $x \in (0, 2)$ konvergiert.

Hinweis:

Die Taylor-Entwicklung besitzt die Gestalt

$$f(x_0 + h) = f(x) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} h + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n + R_{n+1}(x_0, h)$$

mit dem Restglied

$$R_{n+1}(x_0, h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} \quad \text{mit einem } \xi \in (x_0, x_0 + h).$$

[3] D. Coppersmith, S. Winograd, *Matrix Multiplication via Arithmetic Progressions,* Journal of Symbolic Computation, 9:251–280 (1990).

[4] F. Le Gall, *Powers of tensors and fast matrix multiplication*, Proceedings of the 39th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC 2014)