Prof. Dr. Angela Kunoth
Max Glembock, Laslo Hunhold

Matlab Präsenzaufgaben — WS 2017/2018

Übungsblatt 10

Matlab in der Numerik

Wir möchten auf diesem Übungsblatt eine Brücke zwischen der in der Algo.-Math.-Vorlesung präsentierten Theorie und der praktischen Anwendung in Matlab schaffen. Dabei erklären wir die gebräuchlichsten Befehle und gehen chronologisch zur Vorlesung vor.

Direkte Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Wir betrachten zunächst die Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme und beginnen mit der *LR-Zerlegung*. In der Matlab-Dokumentation ist die LR-Zerlegung unter dem Begriff *„LU-Factorization"* zu finden, wobei das L für die untere Dreiecksmatrix (engl.: *„Lower Triangle"*) und das U für die obere Dreiecksmatrix (engl.: *„Upper Triangle"*) steht. Der standardmäßige Befehl zum Erzeugen einer LR-Zerlegung für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lautet:

```
[L, U, P] = lu(A);
```

Neben den bereits erwähnten Dreiecksmatrizen $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wird bei der optionalen Eingabe von `P` die Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gespeichert, für die $L \cdot U = P \cdot A$ gilt und die durch Zeilenpivotisierung entsteht. Die Matrix L wird von Matlab nur dann als untere Dreiecksmatrix ausgegeben, wenn P mitberechnet wird. Andernfalls sind die Zeilenvertauschungen in L integriert. Es sei noch einmal erwähnt, dass die LR-Zerlegung auf beliebige nichtsinguläre Matrizen angewandt werden kann und eine Laufzeit von $O(\frac{1}{3}n^3)$ hat.

In der Praxis arbeitet man jedoch oft mit Matrizen, die bestimmte Struktureigenschaften aufweisen. Die Cholesky-Zerlegung eignet sich bspw. für eine Zerlegung von symmetrischen, positiv definiten Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Es gibt zwei Standardbefehle zum Ausführen einer Cholesky-Zerlegung in Matlab:

```
R = chol(A, 'upper');   bzw.   R = chol(A);
L = chol(A, 'lower');
```

Hierbei wird in $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix gespeichert, für die $R^T \cdot R = A$ gilt, und in $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine untere Dreiecksmatrix, für die $L \cdot L^T = A$ gilt. Dabei ist $R = L^T$. Die Cholesky-Zerlegung hat eine Laufzeit von $O(\frac{1}{6}n^3)$.

Ein drittes Zerlegungsverfahren ist die *QR-Zerlegung*. Die QR-Zerlegung kann auf beliebige Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ angewandt werden und ist eindeutig, falls $m \geq n$ und $rang(A) = n$ gilt. Der Standardbefehl zum Ausführen einer QR-Zerlegung in Matlab lautet:

```
[Q, R] = qr(A);
```

Die Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ist dabei orthogonal und die Matrix $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist eine obere Dreiecksmatrix . Es gilt $Q \cdot R = A$. Eine QR-Zerlegung hat im Vergleich zur LR-Zerlegung mindestens doppelte Laufzeit, jedoch bessere Stabilitätseigenschaften.

Eine weitere Form der Zerlegung ist die *Singulärwertzerlegung* (kurz: *SWZ*). Eine SWZ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $rang(A) = p \leq \min(m,n)$ ist ein Produkt der Gestalt $A = U \cdot S \cdot V^T$, wobei

- $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ orthogonal,
- V^T die Adjungierte einer orthogonalen Matrix $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und
- $S \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Diagonalmatrix mit der Größe nach absteigend geordneten Diagonaleinträgen $\sigma_i := \sqrt{\lambda_i(A^T \cdot A)}$, $i = 1, \dots, p$ ist. Die restlichen $\min(m,n) - p$ Diagonaleinträge sind Nullen.

In Matlab ist eine SWZ für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ durch den Befehl

```
[U, S, V] = svd(A);
```

ausführbar. Im Falle $m > n$ werden in der Matrix S zusätzliche Nullzeilen abgespeichert. Möchte man diese Nullzeilen nicht haben, so kann dies direkt durch den Befehl `svd(A, 0)` beachtet werden und für die Matrix S gilt $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Aufgabe 35 (Lösen eines Gleichungssystems)
Schreiben Sie ein Skript, in dem Sie eine Zufallsmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einen zufälligen Spaltenvektor $y \in \mathbb{R}^n$ über den `rand`-Befehl erstellen. Es ist bekannt, dass die Matrix $A + A^T$ symmetrisch ist. Über die Gerschgorin-Kreise kann man sich klar machen, dass alle Eigenwerte der Matrix $B := A + A^T + n \cdot I$ positiv sind, womit B symmetrisch und positiv definit ist. Wir möchten das Gleichungssystem $B \cdot x = y$ mit der LR-Zerlegung, der Cholesky-Zerlegung und der QR-Zerlegung lösen und für jedes Verfahren mit den `tic`-`toc`-Befehlen die benötigte Zeit messen. Messen Sie außerdem die Zeit für eine Lösung des LGS durch den Backslash-Operator von Matlab. Erweitern Sie Ihr Skript entsprechend und machen Sie insgesamt drei Durchläufe mit

a) $n = 50$,
b) $n = 500$,
c) $n = 5000$.

Nutzen Sie sämtliche Struktureigenschaften ihrer Zerlegungen aus (wie bspw. Orthogonalität) und verwenden Sie zum Lösen der LGS mit den oberen und unteren Dreiecksmatrizen den Backslash-Operator von Matlab. Was fällt Ihnen bzgl. der gemessenen Zeit auf?