PROF. DR. ANGELA KUNOTH
SANDRA BOSCHERT

ALGORITHMISCHE MATHEMATIK
WS 2017/2018

Bonuszettel

Ausgabe: 25.1.2015
Abgabe: Donnerstag, 1.2.2018 bis 14:00 Uhr vor dem Tutorium
Besprechung im Tutorium am 1.2.2018

Die folgenden Aufgaben sind zusätzliche Bonusaufgaben. Sie sind freiwillig und werden nur korrigiert, wenn noch Punkte zur Klausurzulassung benötigt werden. Die Aufgaben sollen als Klausurvorbereitung dienen.

Aufgabe B1: (5 Punkte)
Es ist jeweils nur *eine* Antwort richtig.

1. Welche der folgenden Aussagen über die Kondition ist korrekt?
   - ◯ Die Multiplikation zweier reeller Zahlen ist gut konditioniert und die Addition zweier reeller Zahlen mit gegensätzlichem Vorzeichen ist ebenfalls gut konditioniert.
   - ◯ Die Multiplikation zweier reeller Zahlen ist gut konditioniert und die Addition zweier reeller Zahlen mit gegensätzlichem Vorzeichen ist schlecht konditioniert.
   - ◯ Die Multiplikation zweier reeller Zahlen mit gegensätzlichem Vorzeichen ist schlecht konditioniert und die Addition zweier reeller Zahlen ist stets gut konditioniert.
   - ◯ Die Multiplikation zweier reeller Zahlen mit gegensätzlichem Vorzeichen ist schlecht konditioniert und die Addition zweier reeller Zahlen mit gegensätzlichem Vorzeichen ist ebenfalls schlecht konditioniert.

2. Wovon ist die Maschinengenauigkeit (double precision) abhängig?
   - ◯ Von der Länge der Mantisse
   - ◯ Von der Größe des Exponenten
   - ◯ Von der kleinsten darstellbaren Zahl
   - ◯ Von der größten darstellbaren Zahl

3. Wie lässt sich die relative Maschinengenauigkeit bestimmen? (fl bezeichne die Standardrundung)
   - ◯ $\min\{\delta > 1 : \mathrm{fl}(\delta) > 0\}$
   - ◯ $\min\{\delta > 0 : \mathrm{fl}(1+\delta) > 0\}$
   - ◯ $\min\{\delta > 0 : \mathrm{fl}(\delta) > 1\}$
   - ◯ $\min\{\delta > 0 : \mathrm{fl}(1+\delta) > 1\}$

4. Wie lässt sich das Vorgehen bei der QR-Zerlegung einer Matrix A am besten beschreiben?
   - ◯ Man transformiert A durch sukzessive Multiplikation mit geeigneten Orthogonalmatrizen auf ein Vielfaches der Einheitsmatrix.
   - ◯ Man transformiert A durch sukzessive Multiplikation mit geeigneten Orthogonalmatrizen auf die Gestalt einer Givensmatrix.
   - ◯ Man transformiert A durch sukzessive Multiplikation mit geeigneten Orthogonalmatrizen auf die Gestalt einer oberen Dreiecksmatrix.
   - ◯ Man transformiert A durch sukzessive Multiplikation mit geeigneten Orthogonalmatrizen auf die Gestalt einer Householder-Matrix.

5. Welche Komplexität hat die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$?
   - ◯ $O(\log n)$
   - ◯ $O(n)$
   - ◯ $O(n^2)$
   - ◯ $O(n^3)$

6. Betrachten Sie das lineare Ausgleichsproblem $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax-b\|_2$ mit $b \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, wobei $m \le n$. Wie lässt sich die/eine Lösung des Ausgleichsproblems bestimmen?
   - ◯ Durch Lösen des Gleichungssystems $A^T x = A^T b$
   - ◯ Durch Lösen des Gleichungssystems $Ax = A^T b$
   - ◯ Durch Lösen des Gleichungssystems $A^T Ax = b$
   - ◯ Durch Lösen des Gleichungssystems $A^T Ax = A^T b$

7. Wie lässt sich die Pseudoinverse einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \ge n$, mit Rang $A = n$ bestimmen?
   - ◯ $A^+ = (A^T A)^{-1} A$
   - ◯ $A^+ = (AA^T)^{-1} A$
   - ◯ $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$
   - ◯ $A^+ = (AA^T)^{-1} A^T$

8. Gegeben ist die Matrix

$$A := \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} T & -I & & & \\ -I & T & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & T & -I \\ & & & -I & T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)^2\times(n-1)^2}, \quad T := \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)},$$

wobei I die $(n-1)\times(n-1)$-Einheitsmatrix bezeichnet und $n = 2^j$ ist. Die Matrix A soll in Matlab mit Hilfe des Kroneckerproduktes implementiert werden, so dass minimal wenig Speicherplatz benötigt wird. Welche der folgenden Implementierungen erfüllt diese Vorgaben?

◯
```
n=2^j;
h=1/n;
D = sparse(1:n-1,1:n-1,-2*ones(1,n-1),n-1,n-1);
E = sparse(2:n-1,1:n-2,ones(1,n-2),n-1,n-1);
F = E+D+E';
I=speye(n-1);
A=1/h^2*(kron(F,-I)+kron(-I,F));
```

◯
```
n=2^j;
h=1/n;
D = sparse(1:n-1,1:n-1,-2*ones(1,n-1),n-1,n-1);
E = sparse(2:n-1,1:n-2,ones(1,n-2),n-1,n-1);
F = E+D+E';
I=speye(n-1);
A=1/h^2*(kron(F,-I)+kron(F,-I));
```

◯
```
n=2^j;
h=1/n;
D = sparse(1:n-1,1:n-1,-2*ones(1,n-1),n-1,n-1);
E = sparse(1:n-2,1:n-2,ones(1,n-2),n-1,n-1);
F = E+D+E';
I=speye(n-1);
A=1/h^2*(kron(F,-I)+kron(F,-I));
```

◯
```
n=2^j;
h=1/n;
D = sparse(1:n-1,1:n-1,-2*ones(1,n-1),n-1,n-1);
E = sparse(2:n-1,1:n-2,ones(1,n-2),n-1,n-1);
F = E+D+E';
I=eye(n-1);
A=1/h^2*(kron(F,-I)+kron(-I,F));
```

9. In Matlab soll eine $2^{16} \times 2^{16}$ Diagonalmatrix mit Einträgen eines Zufallsvektors implementiert werden. Die Diagonalmatrix D soll dabei mit minimal wenig Speicherplatz abgespeichert und mit maximaler Effizienz aufgestellt werden. Welche der folgenden Implementierungen erfüllt diese Vorgaben?

   ◯
   ```
   n=2^16;
   D=diag(rand(n,1));
   ```
   ◯
   ```
   n=2^16;
   D=sparse(diag(rand(n,1)));
   ```
   ◯
   ```
   n=2^16;
   D=spdiags([rand(n,1)], 0, n, n);
   ```
   ◯
   ```
   n=2^16;
   D=sparse(n);
   for i=1:2^16
   D(i,i)=rand(1,1);
   end
   ```

10. Die Datei `daten.csv` ist eine Excel-Tabelle mit Daten in 3 Spalten und einer Überschrift in der ersten Zeile. Öffnen Sie die csv-Datei `daten.csv` über `fopen` mit Leserechten und importieren Sie die Daten über den `textscan`-Befehl in Matlab. Als `formatSpec` tragen Sie `'%s %*f %f '` und als `delimeter` ein Komma (`','`) ein. Der Befehl in Matlab lautet:

    ```
    clear all
    fileID = fopen('daten.csv', 'r');
    OriData = textscan(fileID, '%s %*f %f', 'delimiter', ',', 'HeaderLines', 1);
    fclose(fileID);
    ```

    Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

    ◯ Durch die *-Sterne wird Matlab kenntlich gemacht, dass die entsprechende Spalte nicht eingelesen werden soll. Somit lesen wir nur die erste Spalte sowie die dritte Spalte ein.

    ◯ Durch die *-Sterne wird Matlab kenntlich gemacht, dass die entsprechende Zeile nicht eingelesen werden soll. Somit lesen wir nur die erste Zeile sowie die dritte Zeile ein.

    ◯ Durch die *-Sterne wird Matlab kenntlich gemacht, dass die entsprechende Zeile eingelesen werden soll. Somit lesen wir nur die zweite Zeile ein.

    ◯ Durch die *-Sterne wird Matlab kenntlich gemacht, dass die entsprechende Spalte eingelesen werden soll. Somit lesen wir nur die zweite Spalte ein.

Aufgabe B2: (5 Punkte)

Bestimmen Sie die *QR*-Zerlegung der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

mittels Householder-Reflektionen. Geben Sie anschließend an, wie die Matrix abgespeichert werden kann, um Speicherplatz zu sparen.

Aufgabe B3: (5 Punkte)

Beweisen Sie den folgenden *Störungssatz*:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nichtsingulär und $b \in \mathbb{R}^n$, sowie $\tilde{x} = x + \Delta x$ die Lösung des gestörten Systems

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b.$$

Es gelte

$$||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A|| < 1.$$

Dann gilt

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq \frac{\kappa_{||\cdot||}(A)}{1 - \kappa_{||\cdot||}(A)\frac{||\Delta A||}{||A||}} \left(\frac{||\Delta A||}{||A||} + \frac{||\Delta b||}{||b||} \right)$$

mit der induzierten Operatornorm

$$||A|| := \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||},$$

sowie der Kondition von A bezüglich $||\cdot||$,

$$\kappa_{||\cdot||}(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||.$$

Aufgabe B4: (5 Punkte)

a) Der Spektralradius einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist als

$$\rho(A) := \max\{|\lambda|,\ \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$$

definiert. Zeigen Sie, dass $\rho(A)$ keine Norm ist.

b) Betrachten Sie das lineare Ausgleichsproblem:
Zu $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ finde $x \in \mathbb{R}^n$, so dass $\|Ax - b\|_2$ minimal ist. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie die zugehörige Normalengleichung explizit auf und bestimmen Sie die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$. Berechnen Sie das Residuum $r = Ax - b \in \mathbb{R}^m$ und den mittleren quadratischen Fehler

$$e := \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} r_i^2}, \qquad r = (r_1, \ldots, r_m)^T \in \mathbb{R}^m.$$