PROF. DR. ANGELA KUNOTH
SANDRA BOSCHERT

ALGORITHMISCHE MATHEMATIK UND PROGRAMMIEREN
WS 2017/2018

Übungsblatt 9

Ausgabe: 7.12.2017 Abgabe: Donnerstag, 14.12.2017 bis 14:00 Uhr vor dem Tutorium

Aufgabe 28: (1+4+4+5+2+4)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes und zusammenhängendes Gebiet mit dem Rand $\partial\Omega$. Gegeben sei die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Wir suchen eine Funktion $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, die das *Dirichlet*-Problem mit homogenen Randdaten

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

löst, wobei $\Delta u(x,y) := \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}$ der Laplaceoperator ist. Unsere Aufgabe sei es nun Problem (1) numerisch zu lösen. Dazu nehmen wir $\Omega = (0,1)^2$ an. Zur numerischen Lösung des Problems wird ein regelmäßiges quadratisches Gitter mit Schrittweite $h = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ eingeführt. Damit ist die Menge der inneren Gitterpunkte und der Randpunkte gegeben als

$$\Omega_h := \{(ih, jh) | 1 \le i, j \le n-1\}, \quad \partial\Omega_h := \{(ih, jh) | i, j = 0, n\}.$$

Jetzt berechnen wir Näherungen für die Funktionswerte u auf Ω_h mit

$$u_h(x,y) \approx u(x,y)$$

für $(x,y) \in \Omega_h$. Die Idee hierzu ist, dass man die Differentialgleichung (1) diskretisiert und das hierdurch entstehende Gleichungssystem löst. Dazu approximieren wir den Laplace-Operator $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}$ durch die Differenzenformel

$$\Delta u(x,y) \approx \Delta_h u(x,y) = \frac{1}{h^2}(u(x-h,y) + u(x+h,y) + u(x,y-h) + u(x,y+h) - 4u(x,y)). \tag{2}$$

Im Folgenden gelte die Notation $u_{i,j} \approx u(ih, jh)$. Die diskretisierte Form von $-\Delta u = f$ ist somit

$$\frac{1}{h^2}(-u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1} + 4u_{i,j}) = f_{i,j} \tag{3}$$

mit $f_{i,j} := f(ih, jh)$ und $i, j = 1, \ldots, n-1$. Zur Berechnung von $u_{i,j}$ werden Nachbarwerte benutzt. Dies kürzt man mittels eines 5-Punkte-Differenzensterns

$$-\Delta u(x,y) \approx -\Delta_h u(x,y) := \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ab. Dieser ist nützlich für die geometrische Darstellung der Approximation auf Ω_h. Zur Berechnung der $u_{i,j}$ über lineare Gleichungssysteme ist eine derartige Festlegung nötig. Wir nehmen hier die lexikographische Nummerierung von links unten horizontal nach rechts oben. Da die Randwerte durch die Problemstellung bereits bekannt sind und nur Werte in Ω_h gesucht sind, gibt es insbesamt $(n-1)^2$ Unbekannte. (3) liefert somit ein lineares Gleichungssystem der Größe $(n-1)^2$:

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{4}$$

mit $\mathbf{u} := (u_{1,1}, \ldots, u_{1,n-1}, u_{2,n-1}, \ldots, u_{n-1,n-1})^T$ und $\mathbf{f} := (f_{1,1}, f_{1,2}, \ldots)^T$ und

$$A := \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} T & -I & & & \\ -I & T & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & T & -I \\ & & & -I & T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)^2 \times (n-1)^2}, \quad T := \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)},$$

wobei I die $(n-1) \times (n-1)$-Einheitsmatrix bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass sich mit Hilfe der Taylorentwicklung folgende Differenzenformel aus (2) ergibt:

$$\Delta u(x,y) \approx \Delta_h u(x,y) = \frac{1}{h^2}(u(x-h,y)+u(x+h,y)+u(x,y-h)+u(x,y+h)-4u(x,y)).$$

b) Nun betrachten wir positiv definite und symmetrische Matrizen. Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung der positiv definiten und symmetrischen Block-Tridiagonalmatrix $M = \tilde{L}\tilde{L}^T$ gemäß

$$\begin{pmatrix} D_1 & B_2^T & & & \\ B_2 & D_2 & B_3^T & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & B_{n-2} & D_{n-2} & B_{n-1}^T \\ & & & B_{n-1} & D_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{L}_1 & & & & \\ F_2 & \tilde{L}_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & F_{n-2} & \tilde{L}_{n-2} & \\ & & & F_{n-1} & \tilde{L}_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{L}_1^T & F_2^T & & & \\ & \tilde{L}_2^T & F_3^T & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \tilde{L}_{n-2}^T & F_{n-1}^T \\ & & & & \tilde{L}_{n-1}^T \end{pmatrix},$$

wobei $D_i, B_j \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ symmetrische Matrizen sind. Geben Sie dabei die Rechenvorschriften für die Blöcke $\tilde{L}_i$ für $i = 1,\dots,n-1$ und F_j für $j = 2,\dots,n-1$ an. Um die Vorwärtssubstitution und die Rückwärtssubstitution des Systems $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ durchzuführen, wird der Vektor $\mathbf{x}$ konform mit M in der Form $\mathbf{x} := (\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \dots, \mathbf{x}_{n-1}^T)^T$ partitioniert. Geben Sie die Rechenvorschriften für die Vorwärts- und Rückwärtssubstitution in Abhängigkeit der Matrizen $\tilde{L}_i$ und F_j an. Wenden Sie anschließend die allgemeinen Rechenvorschriften auf das lineare Gleichungssystem aus (4) an.

c) Wie viele arithmetische Operationen benötigt die Cholesky-Zerlegung zur Bestimmung der Lösung $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{(n-1)^2}$ des linearen Gleichungssystems aus (4), wenn man Operationen mit Null vernachlässigt? Begründen Sie ihre Antwort ausführlich.

Hinweis: Die k-te Spalte der Inversen einer unteren Dreiecksmatrix L_i ergibt sich durch die Lösung des linearen Gleichungssystems $L_i \tilde{x}_k = e_k$, wobei e_k den k-ten Einheitsvektor bezeichnet. Nutzen Sie außerdem bei der Matrixmultiplikation von $F_i F_i^T$ die spezielle Struktur bei der Bestimmung des Aufwands aus.

d) Implementieren Sie die Diskretisierungsmatrix aus (4) für $n = 2^j$ in Matlab. Achten Sie dabei auf eine effiziente Implementierung, d.h. nutzen Sie zur Aufstellung der Matrix in Matlab keine for-Schleife und das sparse-Format. Achten Sie darauf, dass in ihrem Programm zu keinem Zeitpunkt die Matrix voll aufgestellt wird. Hierbei sind die Befehle *speye* und *kron* hilfreich. Nutzen Sie die Funktion *chol(A,′ lower′)* um die Matrix mit der Cholesky-Zerlegung in der Form $A = \tilde{L}\tilde{L}^T$ zu zerlegen.

e) Erstellen Sie einen spy-Plot der Matrizen A und $\tilde{L}$ für $j = 3$. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

f) Schreiben Sie ein Programm zur numerischen Approximation der Lösung des homogenen Dirichlet-Problems (1) mit rechter Seite $f(x,y) \equiv 1$. Implementieren Sie die rechte Seite $\mathbf{f}$. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ aus (4) mit der Vorwärtssubstitution und der Rückwärtssubstitution für die Cholesky-Zerlegung für $j = 7$ in Matlab. Hierbei ist der \-Operator hilfreich. Erstellen Sie dann einen geeigneten Plot der numerischen Lösung des Randwertproblems aus (1). Hierzu bietet sich der Befehl *surf* an. Achten Sie auf eine aussagekräftige Beschriftung (*title,xlabel,ylabel,...*).

Zur Abgabe: Geben Sie einen Ausdruck des Programmdurchlaufs und des vorbildlich kommentierten m-files im Tutorium (Zentralübung) ab. Schicken Sie Ihren Programmcode zusätzlich per Email an Ihren jeweiligen Übungsgruppenleiter und zwar mit Subject/Betreff à la:

Subject: Uebung2, Muster, Hans

Bitte erstellen Sie hierzu einen ZIP komprimierten Ordner mit den m-files. Bitte benennen Sie die m-files zum Beispiel mit *aufgabe28.m* und schreiben Sie in jedem m-file ihren Namen. Die Email-Adressen der jeweiligen Übungsgruppenleiter finden Sie auf der Veranstaltungshomepage.