PROF. DR. ANGELA KUNOTH
SANDRA BOSCHERT

ALGORITHMISCHE MATHEMATIK UND PROGRAMMIEREN
WS 2017/2018

Übungsblatt 8

Ausgabe: 30.11.2017 Abgabe: Donnerstag, 7.12.2017 bis 14:00 Uhr vor dem Tutorium

Aufgabe 25: (7 Punkte, 3+4)
Der Spektralradius einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist definiert als

$$\rho(A) := \max\{|\lambda|,\ \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\rho(A)$ keine Norm ist.
Hinweis: Prüfen Sie die Bedingungen, die Normen erfüllen müssen und finden Sie ggf. eine Matrix A als Gegenbeispiel.

b) Zeigen Sie für $A = \left(a_{ij}\right)_{i=1,\dots,m;\, j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

$$\|A\|_1 = \max_{k=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ik}| \qquad \text{(Spaltensummennorm)},$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} \qquad \text{(Spektralnorm)},$$

$$\|A\|_\infty = \max_{k=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{kj}\right| \qquad \text{(Zeilensummennorm)},$$

wobei unter $\|A\|_p$ die Operatornorm bezüglich den Vektornormen

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \|x\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

von Präsenzübung 5 (Aufgabe 9) zu verstehen ist.

Aufgabe 26: (7 Punkte, 1+1+1+1+2+1)
Für einen gegebenen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, definieren wir die Matrix $Q_v \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch

$$Q_v := I - \frac{2}{v^T v} v v^T,$$

wobei I die $n\times n$-Einheitsmatrix bezeichnet. Zeigen Sie

i) $Q_v = Q_v^T$,

ii) $Q_v^2 = I$,

iii) $Q_v \in \mathbb{O}_n(\mathbb{R})$ (d.h. Q_v ist eine Orthogonalmatrix),

iv) $Q_{\alpha v} = Q_v$ für alle reellen $\alpha \neq 0$,

v) $Q_v y = y$ ist äquivalent zu $v^T y = 0$ für $y \in \mathbb{R}^n$,

vi) $Q_v v = -v$.

Aufgabe 27: (6 Punkte)
Zeigen Sie: Für alle $p, q \in \mathbb{R}$ mit $1 \le q \le p \le \infty$ gibt es eine Konstante $c_{p,q,n} \in \mathbb{R}$ (d.h. eine Konstante, die von p, q und n abhängt), so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|x\|_p \le \|x\|_q \le c_{p,q,n} \|x\|_p .$$

Bestimmen Sie die kleinste Konstante $c_{p,q,n}$ mit dieser Eigenschaft. Finden Sie für beide Ungleichungen einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, für den Gleichheit vorliegt.
Hinweis: Es gilt die Hölder Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q}, \qquad \text{für } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$