Prof. Dr. Angela Kunoth
Sandra Boschert

Algorithmische Mathematik und Programmieren
WS 2017/2018

Übungsblatt 7

Ausgabe: 23.11.2017 Abgabe: Donnerstag, 30.11.2017 bis 14:00 Uhr vor dem Tutorium

Aufgabe 24: (20 Punkte, 2+3+3+3+3+3+3)
Gegeben sei das folgende eindimensionale Randwertproblem: Finde $u(x) : [0,1] \to \mathbb{R}$ so dass

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \quad \text{in } (0,1) \\ u(0) = g(0),\ & u(1) = g(1) \end{aligned} \tag{1}$$

auf dem Einheitsintervall $(0,1)$, gegebener rechten Seite f und Randdaten $g(0), g(1)$. Zur numerischen Lösung des Problems mit der Differenzenmethode wird das Intervall $[0,1]$ durch die Gitterpunkte $x_i = ih$ für $i = 0,\dots,n$ mit der Gitterweite $h = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ diskretisiert.

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Taylorentwicklung, dass sich die zweite Ableitung durch den folgenden Differenzenquotienten

$$u''(x) \approx \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2}$$

approximieren lässt.

b) Seien u_i die Näherungswerte der Lösung $u(x_i)$ an der Stelle x_i und $f(x_i) := f_i$ die Auswertung der Funktion f an der Stelle x_i. Zeigen Sie, dass für das gegebene Randwertproblem (1) folgende Differenzengleichung in Matrixform gilt:

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f},$$

wobei

$$A := \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}, \tag{2}$$

$$\mathbf{u} := (u_1, u_2, \dots, u_{n-1})^T, \quad \mathbf{f} := \left(f_1 + \frac{g(0)}{h^2}, f_2, \dots, f_{n-2}, f_{n-1} + \frac{g(1)}{h^2}\right).$$

Handelt es sich bei der Matrix A um eine dünn besetzte Matrix? Begründen Sie ihre Antwort.

c) Zeigen Sie, dass sich die LR-Zerlegung einer Tridiagonalmatrix mit $d_k, a_i, c_j \neq 0$ für $k = 1,\dots,n-1$, $i = 2,..,n-1$, $j = 1,\dots,n-2$ gemäß

$$\begin{pmatrix} d_1 & c_1 & & & \\ a_2 & d_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-2} & d_{n-2} & c_{n-2} \\ & & & a_{n-1} & d_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \ell_2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ell_{n-2} & 1 & \\ & & & \ell_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & c_1 & & & \\ & r_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & r_{n-2} & c_{n-2} \\ & & & & r_{n-1} \end{pmatrix}$$

bestimmen lässt.

d) Geben Sie die Rechenvorschriften zur Bestimmung von ℓ_i für $i = 2,\dots,n-1$ und r_k für $k = 1,\dots,n-1$ an. Führen Sie dann die Vorwärtssubstitution ($L\mathbf{y} = \mathbf{f}$) und die Rückwärtssubstitution ($R\mathbf{u} = \mathbf{y}$) durch. Geben Sie auch hier allgemeine Rechenvorschriften für y_k und u_k für $k = 1,\dots,n-1$ an. Wenden Sie anschließend die allgemeinen Rechenvorschriften auf die Matrix A aus (2) an.

e) Wie viele arithmetische Operationen benötigt die LR-Zerlegung zur Bestimmung der Lösung $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{(n-1)}$ des linearen Gleichungssystems $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$, wenn man Operationen mit Null vernachlässigt?

f) Implementieren Sie die Diskretisierungsmatrix aus (2) für $n = 2^j$ in Matlab. Achten Sie dabei auf eine effiziente Implementierung, d.h. nutzen Sie zur Aufstellung der Matrix in Matlab keine for-Schleife und das sparse-Format. Nutzen Sie die Funktion $[L, R] = lu(A)$ in Matlab, um die Matrix A für $j = 5$ mit der LR-Zerlegung in eine untere Dreiecksmatrix L und obere Dreiecksmatrix R zu zerlegen. Erstellen Sie einen spy-plot der Matrizen A, L und R. Achten Sie auf eine aussagekräftige Beschriftung.

g) Implementieren Sie die rechte Seite $\mathbf{f}$ für $f(x) = -1$, $g(0) = g(1) = 0$ und für $f(x) = 1$, $g(0) = g(1) = 1$. Lösen Sie das jeweilige lineare Gleichungssystem $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ mit der Vorwärtssubstitution $L\mathbf{y} = \mathbf{f}$ und der Rückwärtssubstitution $R\mathbf{u} = \mathbf{y}$ für $j = 7$ in Matlab. Nutzen Sie dazu den \-Operator. Erstellen Sie dann einen geeigneten Plot der jeweiligen numerischen Lösungen des Randwertproblems aus (1). Achten Sie auf eine aussagekräftige Beschriftung.

Zur Abgabe: Geben Sie einen Ausdruck des Programmdurchlaufs und des vorbildlich kommentieren m-files im Tutorium (Zentralübung) ab. Schicken Sie Ihren Programmcode zusätzlich per Email an Ihren jeweiligen Übungsgruppenleiter und zwar mit Subject/Betreff à la:

Subject: Uebung2, Muster, Hans

Bitte erstellen Sie hierzu einen ZIP komprimierten Ordner mit den m-files. Bitte benennen Sie die m-files zum Beispiel mit *aufgabe24.m* und schreiben Sie in jedem m-file ihren Namen. Die Email-Adressen der jeweiligen Übungsgruppenleiter finden Sie auf der Veranstaltungshomepage.