Universität zu Köln

Prof. Dr. Angela Kunoth
Sandra Boschert

Algorithmische Mathematik und Programmieren
WS 2017/2018

Übungsblatt 6

Ausgabe: 16.11.2017 Abgabe: Donnerstag, 23.11.2017 bis 14:00 Uhr vor dem Tutorium

Aufgabe 22: (14 Punkte, 1+1+2+5+5)
Für die Integrale

$$I_n := \frac{1}{e}\int_0^1 x^n e^x, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

gelten die Rekursionsformeln

$$\text{(V)} \quad I_n = 1 - nI_{n-1} \quad n = 1, 2, \ldots$$
$$\text{(R)} \quad I_{n-1} = \frac{1 - I_n}{n} \quad n = N, N-1, \ldots.$$

Diese Rekursionen können mit dem Wert $I_0 = (e-1)/e$ bei (V) bzw. einem I_N mit $N > 0$ bei (R) gestartet werden. Hierbei bezeichnen I_n die exakten Werte und $\tilde{I}_n$ die auf einem Rechner erhaltenen Ergebnisse. Für den Startwert gilt $\tilde{I}_0 - I_0 \neq 0$.

a) Leiten Sie die Rekursionsformel (V) und (R) zur Bestimmung von I_n her.

b) Zeigen Sie, dass das Integral in (1) die Abschätzung $0 < I_n \leq \frac{1}{n+1}$ erfüllt.

c) Zeigen Sie, dass für die Vorwärtsrekursion (V) folgende Fehlerformel gilt: $\tilde{I}_n - I_n = (-1)^n n!(\tilde{I}_0 - I_0)$. Leiten Sie daraus den Fehler $\tilde{I}_0 - I_0$ für die Rückwärtsrekursion (R) her.

d) *Vorwärtsrekursion:*
Verwenden Sie die Vorwärtsrekursion (V) zur Bestimmung von I_n mit dem gegebenen Startwert I_0. Schreiben Sie eine Funktion in Matlab, die die Vorwärtsrekursion für ein gegebenes n ausführt. Vergleichen Sie die Ergebnisse für I_{28}, I_{29} und I_{30} mit der Abschätzung $0 < I_n \leq \frac{1}{n+1}$. Erklären Sie die Ergebnisse mittels der Fehlerformel aus Teilaufgabe c). Ist die Vorwärtsrekursion stabil?

e) *Rückwärtsrekursion:*
Verwenden Sie die Rückwärtsrekursion (R) zur Bestimmung von I_0 mit den Startwerten $0, \frac{1}{31}, 10^{10}$. Schreiben Sie eine Funktion in Matlab, die die Rückwärtsrekursion für ein gegebenes N und einem gegebenen Startwert I_N ausführt. Setzen Sie $N = 30$. Erklären Sie die Ergebnisse mittels der Fehlerformel aus Teilaufgabe c). Ist die Rückwärtsrekursion stabil?

Hinweis: Zur Ausgabe der Zahlen verwenden Sie bitte die exponentielle Notation (Format Operator %1.16e) im Zusammenhang mit dem fprintf-Befehl.

Aufgabe 23: (6 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und (strikt) positiv definit, das heißt es gilt

$$\langle x, Ax \rangle := x^T A x > 0, \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } x \not\equiv 0 \text{ und } \langle x, y \rangle := x^T y.$$

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

a) A hat nur positive, reelle Eigenwerte.
Hinweis: Nehmen Sie zunächst an, dass der Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ mit zugehörigem Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^n$, $v \not\equiv 0$ ist und zeigen Sie $\lambda \langle v, v \rangle = \overline{\lambda} \langle v, v \rangle$ für $Av = \lambda v$. Verwenden Sie hier für das Standardskalarprodukt $\langle x, y \rangle := \overline{x}^T y$ im $\mathbb{C}^n$, wobei der Überstrich die komplexe Konjugation bedeutet.

b) A hat nur positive reelle Diagonalelemente, das heißt $a_{ii} > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
Hinweis: Es gilt $0 < \langle x, Ax \rangle$ für $x \not\equiv 0$.

c) Jede Hauptuntermatrix

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} a_{i_1,i_1} & \cdots & a_{i_1,i_\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_\ell,i_1} & \cdots & a_{i_\ell,i_\ell} \end{pmatrix}$$

für $1 \leq i_1 \leq i_\ell \leq n$ ist wieder symmetrisch, positiv definit.

d) A ist invertierbar und die Inverse A^{-1} ist ebenfalls symmetrisch, positiv definit.

Zur Abgabe: Geben Sie einen Ausdruck des Programmdurchlaufs und des vorbildlich kommentieren m-files im Tutorium (Zentralübung) ab. Schicken Sie Ihren Programmcode zusätzlich per Email an Ihren jeweiligen Übungsgruppenleiter und zwar mit Subject/Betreff à la:

Subject: Uebung2, Muster, Hans

Bitte erstellen Sie hierzu einen ZIP komprimierten Ordner mit den m-files. Bitte benennen Sie die m-files zum Beispiel mit *aufgabe16.m* und schreiben Sie in jedem m-file ihren Namen. Die Email-Adressen der jeweiligen Übungsgruppenleiter finden Sie auf der Veranstaltungshomepage.