Prof. Dr. Angela Kunoth
Sandra Boschert

Algorithmische Mathematik und Programmieren
WS 2017/2018

Übungsblatt 5

Ausgabe: 9.11.2017 Abgabe: Donnerstag, 16.11.2017 bis 14:00 Uhr vor dem Tutorium

Aufgabe 19: (10 Punkte, 6+2+2)
Für die Integrale

$$I_n := \frac{1}{e}\int_0^1 x^n e^x, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

gelten die Rekursionsformeln

$$\text{(V)} \quad I_n = 1 - nI_{n-1} \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\text{(R)} \quad I_{n-1} = \frac{1 - I_n}{n} \quad n = N, N-1, \ldots.$$

Diese Rekursionen können mit dem Wert $I_0 = (e-1)/e$ bei (V) bzw. einem I_N mit $N > 0$ bei (R) gestartet werden. Es liegen jedoch fehlerbehaftete Startwerte $\tilde{I}_0$ und $\tilde{I}_N$ vor. Mit der Gleitpunktarithmetik auf einem Rechner entstehen zusätzlich durch Rundungsfehler die von den exakten Werten abweichenden Ergebnisse $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \ldots$ bzw. $\tilde{I}_{N-1}, \tilde{I}_{N-2}, \ldots$. In jedem Schritt der Rekursion sind dies ein Fehler bei der Subtraktion und ein Fehler bei der Multiplikation bzw. Division.

a) Benutzen Sie die üblichen Modellvorstellungen für die Gleitpunktarithmetik. Leiten Sie daraus die Rekursionsformel für den Fehler bei (V)

$$\left|\tilde{I}_n - I_n\right| \leq 3\varepsilon + n(1+2\varepsilon)\left|\tilde{I}_{n-1} - I_{n-1}\right|$$

her. Zeigen Sie, dass mit $a := 1 + 2\varepsilon$ und $b := 3\varepsilon$ folgende Fehlerformel gilt:

$$\left|\tilde{I}_n - I_n\right| \leq a^n n! \left|\tilde{I}_0 - I_0\right| + b\left(1 + \sum_{i=0}^{n-2}\prod_{j=0}^{i}(n-j)a^{i+1}\right) \qquad \text{für } n \geq 1.$$

Leiten Sie außerdem die Rekursionsformel für den Fehler bei (R)

$$\left|\tilde{I}_{n-1} - I_{n-1}\right| \leq \frac{4\varepsilon}{n} + \frac{1}{n}(1+2\varepsilon)\left|\tilde{I}_n - I_n\right|$$

her. Zeigen Sie, dass mit $\hat{a} := 1 + 2\varepsilon$ und $\hat{b} := 4\varepsilon$ folgende Fehlerformel

$$\left|\tilde{I}_{n-1} - I_{n-1}\right| \leq \frac{\hat{a}^{k+1}}{n(n+1)\cdots(n+k)}\left|\tilde{I}_{n+k} - I_{n+k}\right| + \hat{b}\sum_{i=0}^{k}\frac{\hat{a}^i}{P_i} \qquad \text{mit} \quad P_i := \prod_{j=0}^{i}(n+j)$$

für (R) gilt, wobei $k \in \mathbb{N}$ die Anzahl der rekursiven Aufrufe bezeichnet. Dabei bezeichnet ε die Maschinengenauigkeit.

b) Welcher Term beschreibt den Einfluss der Fehler in den Startwerten? Welcher Term beschreibt die Entwicklung der Rundungsfehler in der Rekursion?

c) Welche Schätzungen liefern die in a) hergeleiteten Fehlerformeln für I_{10}, wenn man
   i) $I_0 = e - 1/e$ auf 6 Stellen rundet und im übrigen fehlerfrei gemäß der Vorwärtsrekursion (V) rechnet?
   ii) $I_{20} := 0$ setzt (was einem Fehler kleiner gleich 10^{-1} entspricht) und fehlerfrei gemäß der Rückwärtsrekursion (R) rechnet?

Hinweis: Verwenden Sie eine Linearisierung des Fehlers im Rekursionsschritt. Benutzen Sie zudem, dass $0 < I_n \leq \frac{1}{n+1}$ ist.

Aufgabe 20: (6 Punkte, 2+2+2)
Betrachten Sie die Rekursionsformel

$$x_k := \frac{16}{3} x_{k-1} - \frac{5}{3} x_{k-2}, \quad k \geq 2 \tag{1}$$

mit $x_0 := 1$ und $x_1 := \frac{1}{2}$.

a) Zeigen Sie $x_k = \frac{27}{28}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{1}{28}\, 5^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

b) Schreiben Sie ein Matlab-Programm, welches mit Hilfe der Formel (1) die Werte x_k für $k = 2, 3, 4, \ldots, 20$ berechnet. Geben Sie jeweils den absoluten und den relativen Fehler an.

c) Die allgemeine Lösung der Rekursionsvorschrift (1) lautet

$$x_k = a_1(x_0, x_1)\left(\frac{1}{3}\right)^k + a_2(x_0, x_1)\, 5^k, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

wobei sich die Koeffizienten $a_1 := a_1(x_0, x_1)$ und $a_2 := a_2(x_0, x_1)$ eindeutig aus den Startwerten x_0 und x_1 berechnen lassen. Somit hängt x_k von x_0 und x_1 ab. Wir wählen nun als Startwert $x_0 := 1$. Damit hängt x_k nur noch von x_1 ab.

i) Bestimmen Sie $a_1(1, x_1)$ und $a_2(1, x_1)$.

ii) Berechnen Sie die absolute und die relative Konditionszahl

$$\kappa_{k,\text{abs}} := \frac{dx_k(x_1)}{dx_1}, \qquad \kappa_{k,\text{rel}} := \frac{x_1}{x_k(x_1)}\, \kappa_{k,\text{abs}}$$

von x_k bezüglich x_1 bei $x_1 = 1/2$.

Aufgabe 21: (4 Punkte)
Sie haben in Übung 4 (Aufgabe 18) zwei Formeln zur Berechnung der Varianz kennen gelernt. Welcher Algorithmus für V_1 bzw. V_2 ist stabiler und warum?

Zur Abgabe: Geben Sie einen Ausdruck des Programmdurchlaufs und des vorbildlich kommentieren m-files im Tutorium (Zentralübung) ab. Schicken Sie Ihren Programmcode zusätzlich per Email an Ihren jeweiligen Übungsgruppenleiter und zwar mit Subject/Betreff à la:

Subject: Uebung2, Muster, Hans

Bitte erstellen Sie hierzu einen ZIP komprimierten Ordner mit den m-files. Bitte benennen Sie die m-files zum Beispiel mit *aufgabe16.m*. Die Email-Adressen der jeweiligen Übungsgruppenleiter finden Sie auf der Veranstaltungshomepage.