Prof. Dr. Angela Kunoth
Sandra Boschert

Algorithmische Mathematik und Programmieren
WS 2017/2018

Übungsblatt 4

Ausgabe: 2.11.2017 Abgabe: Donnerstag, 9.11.2017 bis 14:00 Uhr vor dem Tutorium

Aufgabe 16: (9 Punkte, 2+5+2)
Sei $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die folgenden beiden Verfahren zur Berechnung von $\cos(kx)$, $k = 0, \ldots, n$:

- Algorithmus A:

$$c_{k+1} := 2c_1c_k - c_{k-1} \quad \text{mit} \quad c_0 := 1, \; c_1 := \cos(x) \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

- Algorithmus B:

$$c_k := c_{k-1} + d_{k-1}, \;\; d_k := 2d_0c_k + d_{k-1} \quad \text{mit} \quad c_0 := 1, \; d_0 := -2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme, dass beide Algorithmen das Ergebnis $c_k = \cos(kx)$ liefern.

b) Schreiben Sie ein Matlab-Programm, das für $n \in \{10^5, 4 \cdot 10^7\}$ und $x = \frac{1}{n}$ die folgenden Ergebnisse berechnet und im `long` Format ausdruckt:
   - $\cos(1)$ direkt mit Hilfe der Matlabfunktion `cos`()
   - $\cos(nx)$ mit Algorithmus A
   - $\cos(nx)$ mit Algorithmus B

   Geben Sie jeweils den relativen Fehler der beiden Ergebnisse an.

c) Begründen Sie, warum die Verwendung von Algorithmus A für große n, wie in Teilaufgabe b), schlechtere Ergebnisse liefert und weshalb Algorithmus B dieses Problem umgeht.

Aufgabe 17: (5 Punkte,1+2+2)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{\cosh(x) - 1}{x^2} \qquad \text{für } 0 < x < \infty.$$

a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

b) Berechnen und tabellieren Sie $f(x)$ für $x = 10^{-k}$ für $k = 1, \ldots, 12$ mit Hilfe von Matlab unter Verwendung der `cosh(x)`-Funktion. Wie erklären Sie die Ergebnisse?

c) Geben Sie mittels einer Taylor-Entwicklung der cosh-Funktion (bis zu einem bestimmten Restglied) eine auslöschungsfreie Approximation $\tilde{f}$ für die Funktion f bei kleinem x an, so dass $|\tilde{f}(x) - f(x)| < 10^{-14}$ für alle $x \in \left(0, 10^{-3}\right)$ gilt. Zeigen Sie, dass ihre Approximation diese Genauigkeit erfüllt.

Aufgabe 18: (6 Punkte, 4+2)

Zu den Messwerten $x = x_1, \dots, x_n$ soll die Varianz berechnet werden. Dazu stehen die zwei Formeln

$$V_1(x) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - n\bar{x}^2\right)$$

$$V_2(x) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2\right)$$

mit dem Mittelwert $\bar{x} = 1/n \sum_{j=1}^{n} x_j$ zur Verfügung. Eingangsdaten sind somit $x_1, \dots, x_n$. Die Formeln motivieren jeweils einen Algorithmus zur Berechnung der Varianz, welche verglichen werden sollen.

a) Zerlegen Sie beide Formeln gemäß

$$V_1 = g_1 \circ f, \qquad V_2 = f \circ g_2,$$

wobei g_1, g_2 Subtraktionen bezeichnen und f in beiden Varianten die gleiche Funktion ist. Geben Sie die Formeln der relativen Kondition von

$$\left|\frac{x_j}{g_i}\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right|, \quad i = 1,2 \quad \text{und} \quad \left|\frac{x_j}{f}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|$$

an. Den Mittelwert $\bar{x}$ können Sie dabei als exakt gegeben annehmen.

b) Sind die Konditionszahlen nach oben beschränkt? Wann entsteht Auslöschung?

Zur Abgabe: Geben Sie einen Ausdruck des Programmdurchlaufs und des vorbildlich kommentieren m-files im Tutorium (Zentralübung) ab. Schicken Sie Ihren Programmcode zusätzlich per Email an Ihren jeweiligen Übungsgruppenleiter und zwar mit Subject/Betreff à la:

Subject: Uebung2, Muster, Hans

Bitte erstellen Sie hierzu einen ZIP komprimierten Ordner mit den m-files. Bitte benennen Sie die m-files zum Beispiel mit *aufgabe16.m*. Die Email-Adressen der jeweiligen Übungsgruppenleiter finden Sie auf der Veranstaltungshomepage.