Prof. Dr. Angela Kunoth
Sandra Boschert

Algorithmische Mathematik und Programmieren
WS 2017/2018

Übungsblatt 13

Ausgabe: 18.1.2018 Abgabe: Donnerstag, 25.01.2018 bis 14:00 Uhr vor dem Tutorium

Aufgabe 36: (8 Punkte)

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $A \not\equiv 0$. Zeigen Sie, dass $A^T A$ einen positiven Eigenwert besitzt.

b) Zeigen Sie, dass ein $\alpha > 0$ und Householdermatrizen $P \in \mathbb{O}_n(\mathbb{R})$ und $Q \in \mathbb{O}_m(\mathbb{R})$ existieren, so dass

$$APe^1 = \alpha Q\tilde{e}^1 \qquad A^T Q\tilde{e}^1 = \alpha Pe^1 \qquad \text{mit } e^1 := (1,0,\dots,0)^T \in \mathbb{R}^n,\ \ \tilde{e}^1 := (1,0,\dots,0)^T \in \mathbb{R}^m.$$

c) Zeigen Sie, dass $Q^T AP$ die Gestalt

$$Q^T AP = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

mit einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{(m-1)\times(n-1)}$ besitzt.

d) Folgern Sie aus c) den Satz zur Singulärwertzerlegung: Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Rang r existieren $U \in \mathbb{O}_m(\mathbb{R})$, $V \in \mathbb{O}_n(\mathbb{R})$ und Singulärwerte $\sigma_i > 0$, $i = 1,\dots,r$, so dass

$$A = U\Sigma V^T$$

mit

$$\Sigma = \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

ist.

Aufgabe 37: (8 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ beliebig mit $\operatorname{rang}(A) = p \le \min(m,n)$. Sei

$$A = U\Sigma V^T$$

mit orthogonalen Matrizen $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und der Diagonalmatrix $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1,\dots,\sigma_p,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\sigma_1 \ge \dots \ge \sigma_p > 0$ die Singulärwertzerlegung von A. Sei außerdem wie in der Vorlesung die *Pseudoinverse* von A definiert durch

$$A^+ := V\Sigma^+ U^T \in \mathbb{R}^{n\times m},$$

mit $\Sigma^+ := \operatorname{diag}(\sigma_1^{-1},\dots,\sigma_p^{-1},0,\dots,0) \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Zeigen Sie:

a) $(A^+A)^T = A^+A$,

b) $(AA^+)^T = AA^+$,

c) $A^+AA^+ = A^+$,

d) $AA^+A = A$.

Aufgabe 38: (4 Punkte)

Gegeben sei ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ und der dadurch induzierten Norm $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Sei $U_n \subset V$ ein n-dimensionaler Unterraum von V. Sei $v \in V$ fest. Zeigen Sie:
Für $u_n \in U_n$ ist

$$\|u_n - v\| = \min_{u \in U_n} \|u - v\|$$

äquivalent zu

$$\langle u_n - v, u \rangle = 0$$

für alle $u \in U_n$.