

Übungsblatt 10

Ausgabe: 14.12.2017

Abgabe: Donnerstag, 21.12.2017 bis 14:00 Uhr vor dem Tutorium

Aufgabe 29: (6 Punkte, 3+3)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix.

- a) Sei $A = QR$ die QR -Zerlegung von A . Zeigen Sie:

$$\kappa_2(R) = \kappa_2(A), \quad \kappa_2(Q) = 1$$

Also verschlechtert sich die Kondition bei der QR -Zerlegung nicht.

- b) Nun sei A regulär und besitze die LR -Zerlegung $A = LR$. Zeigen Sie:

$$\kappa_2(A) \leq \kappa_2(L)\kappa_2(R).$$

Aufgabe 30: (7 Punkte, 1+1+1+2+2)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

welches die eindeutige Lösung $x = (-1, 1)^T$ besitzt.

- a) Zeichnen Sie das Bild des „Einheitskreises“ $\mathcal{K} := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty = 1\}$ unter der linearen Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto Ax$.
- b) Berechnen Sie die Konditionszahl $\kappa_\infty(A)$.
- c) Schätzen Sie den relativen Fehler der Lösung in der Maximumsnorm ab, wenn mit gestörter Matrix \tilde{A} und gestörter rechter Seite \tilde{b} gerechnet wird, für die gilt:

$$\|\tilde{A} - A\|_\infty \leq 0.02 \quad \text{und} \quad \|\tilde{b} - b\|_\infty \leq 0.001.$$

- d) Berechnen Sie die Lösung des gestörten linearen Gleichungssystems $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$, wobei gilt

$$\tilde{A} - A = \begin{pmatrix} -0.01 & 0.01 \\ 0.01 & -0.01 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{b} - b = \begin{pmatrix} -0.001 \\ 0.001 \end{pmatrix}.$$

Vergleichen Sie die Lösung mit der in Teil c) erhaltenen Abschätzung.

- e) Führen Sie die Aufgabenteile c) und d) durch im Falle, dass nur die Matrix A , aber nicht die rechte Seite b gestört ist.

Aufgabe 31: (7 Punkte, 3+2+2)

- a) Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige durch eine Vektornorm induzierte Matrixnorm. Zeigen Sie: Für $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ folgt aus $\|F\| < 1$ die Regularität von $(I + F)$.
- b) Beantworten Sie mit Hilfe von Teil a): Ist die folgende Matrix invertierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0.3 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- c) Geben Sie mit Hilfe von Teil a) eine obere Schranke für die Konditionszahl $\kappa_{\|\cdot\|}$ bezüglich einer geeigneten Matrixnorm $\|\cdot\|$ an.