Prof. Dr. Angela Kunoth
Sandra Boschert

Algorithmische Mathematik und Programmieren
WS 2017/2018

Übungsblatt 1

Ausgabe: 11.10.2017 Abgabe: Donnerstag, 19.10.2017 bis 14:00 Uhr im Tutorium.
Besprechung im Tutorium am 19.10.2017 und in der Übung in der Vorlesungswoche vom 23.10. bis 27.10.2017.

Aufgabe 1: (3 Punkte, 1+2)

a) Verwenden Sie die Regel von l'Hospital, um die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

zu bestimmen. Was bedeutet dies für die Konvergenzgeschwindigkeit bei der Funktion $f(x) = \sin(x)$ für $x \to 0$?

b) Benutzen Sie die Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion, um zu beweisen, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{\exp(x)} = 0 \quad \text{für alle } p > 0.$$

Wie ist daher die Konvergenzgeschwindigkeit der steigenden Exponentialfunktion im Vergleich zum polynomialen Wachstum?

Aufgabe 2: (4 Punkte, 1+1+1+1)
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $x^5 + x^3 + x = O(|x|), \quad$ für $x \to 0$

b) $x^5 + x^3 + x = O(|x|^5), \quad$ für $x \to \infty$

Sei $x > 0$. Untersuchen Sie, für welche Exponenten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

c) $x^\alpha = O(x^\beta)$ für $x \to 1$, $\qquad x^\alpha = o(x^\beta)$ für $x \to 1$

d) $x^\alpha = O(x^\beta)$ für $x \to \infty$, $\qquad x^\alpha = o(x^\beta)$ für $x \to \infty$

Aufgabe 3: (3 Punkte)
Bestimmen Sie die absolute und relative Kondition des Problems der Bestimmung der kleineren Lösung

$$y^* := f(a_1, a_2) := a_1 - \sqrt{a_1^2 - a_2}$$

der quadratischen Gleichung $y^2 - 2a_1 y + a_2 = 0$ für $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ mit $a_1, a_2 > 0$. Begründen Sie, wieso sie für $a_2 \approx a_1^2$ schlecht konditioniert ist.

Aufgabe 4: (2 Punkte)
Seien $i \geq 0$ und $b \geq 2$ natürliche Zahlen. Die Zahl i hat eine eindeutige b-adische Darstellung, das heißt, i lässt sich in folgender Art darstellen:

$$i = \sum_{a=0}^{\infty} i_a b^a,$$

mit Koeffizienten $i_a \in \{0, \ldots, b-1\}$. Wir definieren mit Hilfe dieser Darstellung nun eine Funktion $\phi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ durch

$$\phi_b(i) := \sum_{a=0}^{\infty} \frac{i_a}{b^{a+1}}.$$

Die Folge $\left(\phi_b(i)\right)_{i \in \mathbb{N}_0}$ wird Van der Corput-Folge genannt. Berechnen Sie jeweils die ersten 6 Folgenglieder der Van der Corput-Folge für $b = 2, 3$. Tragen Sie die Paare $\left(\phi_2(i), \phi_3(i)\right)_{i=0,\ldots,5}$ in ein 2-dimensionales Koordinatensystem ein.

Aufgabe 5: (4 Punkte, 2+2)

Bearbeiten Sie diese Aufgabe, indem Sie sich eigenständig in die benötigten Begriffe mit Hilfe des Skriptes und anderen Quellen einarbeiten.

a) Stellen Sie die Zahlen $13, 26, 52, 104$ als 8-Bit-Binärzahlen dar. Was fällt dabei auf und wie lässt sich diese Beobachtung erklären?

b) Gegeben sind die Zahlen $00002025, 00020250, 00202500, 02025000, 20250000$ im Oktalsystem. Übersetzen Sie die Zahlen in das Dezimalsystem.
Tipp: Nutzen Sie den Bitshift aus.

Aufgabe 6: (4 Punkte, 1+1+2)

a) Zu einer gegebenen Vektornorm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ bezeichnet man die Menge

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le 1\}$$

als Norm-(Einheits-)-Kugel. Skizzieren Sie die Norm-Kugeln für $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ im Raum $\mathbb{R}^2$.

b) Bestimmen Sie die Konstanten $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$, mit denen folgende Normäquivalenzen gelten:

$$c_1\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le c_2\|x\|_\infty \qquad c_3\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le c_4\|x\|_\infty \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

c) Gegeben sei eine Vektornorm $\|\cdot\|$ auf dem $\mathbb{R}^n$ und eine reguläre Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\|\cdot\|_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+, \qquad \|x\|_M := \|Mx\|$$

ebenfalls eine Vektornorm auf dem $\mathbb{R}^n$ ist.